

洪水氾濫解析のための 縮約モデルの開発

市川 温(京都大学)

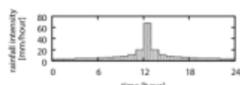
重点研究課題 研究課題番号(4)助成受付番号 第14006号

背景(1)

- 水災害リスクの評価: 様々な外力を与えて洪水氾濫計算を繰り返したい。
- 一般に洪水氾濫計算には大きな計算コストが伴う。
- いろいろな降水場を考えるのは現実的には難しい。

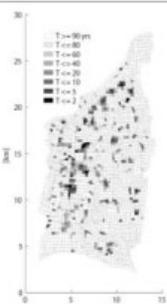
背景(2)

- たとえば...
水災害危険度に基づく土地利用規制の評価
(市川ほか, 2007, 2010など)



中央集中型降雨・空間的には一様

様々な再現期間の降雨を対象とした洪水氾濫計算



目的

- より高速な計算が可能な洪水氾濫計算モデルの導出
H26年度:
 - 局所慣性方程式に基づく洪水氾濫モデルの計算機プログラム開発
 - 氾濫水の流れ構造の基底を抽出する計算機プログラムの開発
 - 洪水氾濫計算の縮約可能性の検証
 H27年度:
 - 一次元局所慣性方程式に基づく縮約モデルの理論的導出
 - 縮約モデルの検証

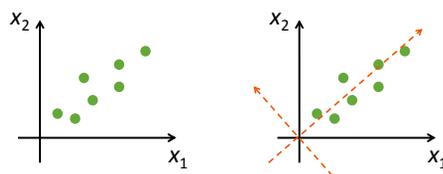
氾濫水の水量に関する情報の縮約

$$\text{Complex waveform} = \text{Simple waveform 1} + \text{Simple waveform 2} + \dots$$

- 氾濫水の水量の空間分布をさまざまなモードを持つ基底の線形結合として考える
- 比較的少数の支配的な基底で分布を近似(再現)できれば、水量に関する情報を縮約できることになる
- 水量の基底の抽出には固有直交分解(主成分分析)を用いる

固有直交分解(主成分分析)

- 多変量データの持つ情報を、少数個の情報に要約する手法



縮約モデル導出の考え方

1. 対象とする物理量(ここでは水深と単位幅流量)がその**基底の線形結合**で表されているとする。
2. モデル基礎式を**離散化**し、さらに**線形化**する。
3. 2の式に1の線形結合式を**代入**する。
4. 3の式と基底との**内積**をとり、基底の**係数**に関する方程式を得る。
5. 4の方程式を解いて基底の係数値を求め、線形結合式に代入して**物理量の値**を求める。

洪水氾濫計算モデル

- 一般には平面二次元不定流モデルが用いられることが多い
- 本研究では、**局所慣性方程式** (Bates et al., 2010)を用いた
 - 局所慣性方程式=不定流モデル-移流項
 - 低平地の洪水氾濫計算では大きな**違いなし**
 - 計算の数値的な**安定性**が高い

局所慣性方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = r$$

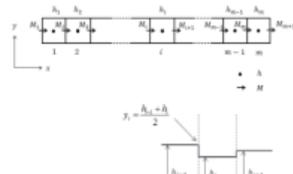
$$\frac{\partial M}{\partial t} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - gn^2 u \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - gn^2 v \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{h^{1/3}}$$

h : 水深、 M : x 方向の単位幅流量、 N : y 方向の単位幅流量、 r : 降水強度、 $H=(h+z)$: 水位、 z : 地盤高、 u : x 方向の流速、 v : y 方向の流速、 g : 重力加速度、 n : Manningの粗度係数

一次元局所慣性方程式とその離散化

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = r$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - gn^2 \frac{M|M|}{h^{7/3}}$$


$$h_i^{n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (M_{i+1}^{n+1} - M_i^{n+1}) + r_i^{n+1} \Delta t$$

$$M_i^{n+1} = M_i^n - g y_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_i^n - H_{i-1}^n) - gn^2 \Delta t \frac{M_i^n |M_i^n|}{(y_i^n)^{7/3}}$$

離散式の線形化

時刻 $n+1$ における変数

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta h}{\Delta t} \left(\Delta t h_i^n + \frac{1}{2} \Delta t (H_{i-1}^n - H_i^n) + \frac{7}{3} gn^2 M_i^n h_i^n^{-5/3} \right) (h_i^n) \\ & + \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Delta t h_i^n - \frac{1}{2} \Delta t (H_{i-1}^n - H_i^n) + \frac{7}{3} gn^2 M_i^n h_i^n^{-5/3} \right) \right] (h_i^n) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Delta t h_{i+1}^n + \frac{1}{2} \Delta t (H_i^n - H_{i+1}^n) + \frac{7}{3} gn^2 M_{i+1}^n h_{i+1}^n^{-5/3} \right) (h_i^n) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Delta t h_{i-1}^n - \frac{1}{2} \Delta t (H_i^n - H_{i-1}^n) + \frac{7}{3} gn^2 M_{i-1}^n h_{i-1}^n^{-5/3} \right) (h_i^n) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - 2gn^2 \Delta t M_i^n h_i^n^{-5/3}) (M_i^n) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - 2gn^2 \Delta t M_{i+1}^n h_{i+1}^n^{-5/3}) (M_i^n) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - 2gn^2 \Delta t M_{i-1}^n h_{i-1}^n^{-5/3}) (M_i^n) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (H_{i-1}^n - H_i^n) h_i^n + \frac{4}{3} gn^2 M_i^n h_i^n^{-2/3} - h_i^n (z_i - z_{i+1}) \right\} \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (H_i^n - H_{i+1}^n) h_{i+1}^n + \frac{4}{3} gn^2 M_{i+1}^n h_{i+1}^n^{-2/3} - h_{i+1}^n (z_i - z_{i+1}) \right\} \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} r_i^n \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} h \\ M \end{bmatrix}^{n+1} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} h \\ M \end{bmatrix}^n + \mathbf{C}$$

時刻 n における変数

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta h}{\Delta t} \left(\Delta t h_i^n + \frac{1}{2} \Delta t (H_{i-1}^n - H_i^n) + \frac{7}{3} gn^2 M_i^n h_i^n^{-5/3} \right) (h_i^n) \\ & - \left(\Delta t h_i^n - \frac{1}{2} \Delta t (H_{i-1}^n - H_i^n) + \frac{7}{3} gn^2 M_i^n h_i^n^{-5/3} \right) (h_i^n) \\ & + (1 - 2gn^2 \Delta t M_i^n h_i^n^{-5/3}) (M_i^n) \\ & - \Delta t \left\{ (H_{i-1}^n - H_i^n) h_i^n + \frac{4}{3} gn^2 M_i^n h_i^n^{-2/3} - h_i^n (z_i - z_{i+1}) \right\} \end{aligned}$$

線形結合の離散式への代入と基底との内積

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \gamma_1 \alpha_1^n + \gamma_2 \alpha_2^n + \dots + \gamma_p \alpha_p^n = \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}^n$$

線形結合式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$: h に対する基底

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n+1} \end{bmatrix} = \lambda_1 \beta_1^n + \lambda_2 \beta_2^n + \dots + \lambda_q \beta_q^n = \mathbf{\Lambda} \boldsymbol{\beta}^n$$

$\mathbf{\Lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$: M に対する基底

代入

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}^{n+1} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}^n + \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{\Phi} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}^{n+1} = \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}^n + \mathbf{C}$$

基底の正規直交性より $\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}$ (単位行列)となる

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}^{n+1} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}^n + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}$$

縮約モデル式

何がどう縮約されるのか

線形結合式

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = \gamma_1 \alpha_1^n + \gamma_2 \alpha_2^n + \dots + \gamma_m \alpha_m^n = \Gamma \alpha^n$$

m 行 (m はセル数)

$$\begin{bmatrix} h \\ M \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^n = \Phi \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^n$$

$(2m+1) \times 1$ $(2m+1) \times (p+q)$ $(p+q) \times 1$

離散式

$$\begin{bmatrix} h \\ M \end{bmatrix}^{n+1} = K \begin{bmatrix} h \\ M \end{bmatrix}^n + C$$

$2m+1$ 行

縮約モデル式

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^{n+1} = \Phi^T K \Phi \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}^n + \Phi^T C$$

$p+q$ 行

$p, q \ll m$ であれば、計算次元が縮約されることになる

縮約モデルの検証

- 長さ1000mの仮想的な一次元領域
- 初期水深: 1.0m
- 流入強度: 0.5m³/s
- セルの大きさ: 10m × 10m
- 計算時間: 24時間
- 計算時間間隔: 1秒

流出部は設けない

局所慣性方程式による計算結果

- いずれも中間地点の時間変化
- 時間的に一定の流入強度を反映して、水深も時間的に一定の割合で増加している。

縮約モデルの計算誤差(1)

- 元のモデルと縮約モデルの計算結果の差の時間変化 (基底の個数: 10, 線形化の時間間隔: 10分)

✓ 計算開始直後 (= 流入開始直後) に大きな計算誤差が生じている。

縮約モデルの計算誤差(2)

- 元のモデルと縮約モデルの計算結果の差の空間分布 (計算開始から1時間後, 線形化の時間間隔: 10分)
 - Case1: 水深の基底10個, 単位幅流量の基底10個
 - Case2: 水深の基底1個, 単位幅流量の基底7個

✓ 基底の数が多いほど再現性が高い。
✓ 上流のほうで計算誤差が大きい。

縮約モデルの計算誤差(3)

- 元のモデルと縮約モデルの計算結果の差の空間分布 (計算開始から3時間後)
 - 線形化の頻度 (時間間隔) の違いによる計算誤差の違い

✓ 線形化の頻度が高い (時間間隔が短い) ほど計算精度が高い。
✓ 上流のほうで計算誤差が大きい。

計算時間の比較

(OS: CentOS 6.7, CPU: Intel(R) Xeon(R) 3.47GHz, メモリ: 160GB)

- 基底の個数を変えた場合 (線形化の時間間隔: 10分)

基底の個数	20 (h: 10, M: 10)	8 (h: 1, M: 7)	元のモデル
計算時間 [秒]	14.11	6.98	17.94

✓ 基底の数が多いほど計算時間は長くなる

- 線形化の時間間隔を変えた場合 (基底の個数: 20)

線形化の時間間隔	1秒	10分	30分	1時間	2時間	3時間	元のモデル
計算時間 [秒]	2274.24	14.11	11.59	10.97	10.68	10.53	17.94

✓ 線形化を行う頻度が高いほど計算時間は長くなる

まとめ

- 一次元の局所慣性方程式から縮約モデルを導出した。
- 縮約モデルと元のモデルによる計算結果を比較した。
- 10~20程度の基底を用いることで、元のモデルの計算結果を精度よく再現できた。
- 基底の個数が多ければ計算精度は高くなる。
- 非線形項の線形化の計算コストが大きいため、適切な頻度で行う必要がある。