

洪水氾濫解析のための 縮約モデルの開発

京都大学 准教授 市川 温

概要：

洪水氾濫計算は、対象領域を多数の格子に区切りその領域の水理量を計算するという構造になっているが、その格子の大きさは、流れの構造を適切に表現できる程度になっていなければならない、格子の数が増えれば増えるほど計算コストが大きくなるという問題がある。

本研究では、洪水氾濫計算に要する時間の短縮を目的とし、従来の氾濫計算モデルに固有直交分解を適用することで計算の次元を低減した縮約モデルを開発する。この縮約モデルにより氾濫計算を行ったところ従来のモデルによって得られた結果をよく再現する結果が得られた。また、計算時間を短縮できることも確認した。

キーワード： 洪水氾濫, 縮約モデル, 固有直交分解, 基底, 局所慣性方程式

1. はじめに

水災害リスクを分析するためには、対象とする地域において、想定される様々な降雨外力を与えて洪水氾濫シミュレーションを繰り返し行い、浸水深や氾濫水の流速などの計算結果を統計的に評価するという方法が考えられる。しかしこの方法では洪水氾濫計算を何度も繰り返す必要があり、計算に多くの時間を要するという問題がある。

一般に、洪水氾濫シミュレーションは、対象地域に平面二次元非定常流モデルを適用し、格子で区切られた多数の小領域（セル）の水理量を計算する、という構造になっていることがほとんどである。氾濫水は様々な速度・方向で流動し、その速度・方向は時間的にも変動する。セルの大きさや個数は、対象地域における氾濫水の流れの構造を適切に表現できる程度になっていなければならないが、セルの個数が多ければ多いほど、計算時間は大きくなる。

このことを、別の角度から考えると、氾濫水の流れの構造、すなわち水理量の時間的空間的分布を適切かつ効率よくとらえることができるのであれば、必ずしも極めて多数のセルを使う必要はないという可能性がある。たとえば、河道流のような一次元的な流れを例にとって考える。仮に流量が下流方向に向かって一定の割合で増えているような場合には、上流端の流量と流量の増加割合という二つの情報だけで流量の空間分布を表せることになり、河道を細かいセルに分割して各セルごとの流量を記憶しておく必要はなくなる。

本研究では、このような考え方を一般化し、氾濫水の水理量の時間的空間的分布をさまざまなモードを持つ基底の重ね合わせとして考えることで、より少ない

情報で氾濫水の挙動を表現することのできる（＝縮約された）洪水氾濫モデルを導出することを目的とする。氾濫水の流れ構造の分析には固有直交分解を利用する。平成 26 年度は、

- 局所慣性方程式に基づく洪水氾濫モデルの計算機プログラム開発
- 氾濫水の流れ構造の低次元基底を抽出する計算機プログラムの開発
- 洪水氾濫計算の縮約可能性の検証

を行い、洪水氾濫計算を縮約できる可能性を示した。平成 27 年度は、氾濫計算の基礎式である局所慣性方程式に固有直交分解を適用して縮約モデルを導出し、この縮約モデルによって縮約前のモデルによる氾濫計算結果を再現することが可能か、また再現結果の精度がどの程度か、計算時間の短縮が可能かを検証する。

2. 固有直交分解を用いた洪水氾濫モデルの縮約

(1) 固有直交分解による情報量の縮約

a) 固有直交分解の概要

n 次元のデータが N 個与えられたとき、そのデータの構造、あるいは主な特徴を知りたいとする。そのためには高次元のデータを低次元に縮約するのが効果的である。縮約の方法はいくつかあるが、その中で最も簡単で広く知られているのが、固有直交分解（Proper Orthogonal Decomposition, POD）である。これは、与えられた多次元データから低次元成分を抽出する分解方法である。この手法は非常に多くの分野で活用されており、それぞれの分野によって、主成分分析、Karhunen-

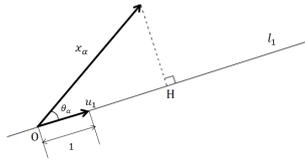


図-1 \mathbf{x}_α の直線 l_1 への射影

Loeve 展開など異なった名称で呼ばれることもある。

データの主な特徴を捉えるため、固有直交分解では、そのデータの分散が最大になる方向を探し出す。位置ベクトル $\mathbf{r}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, N)$ の N 個の点が n 次元空間に分布しているとする。その位置ベクトルの平均値を $\bar{\mathbf{r}}$ とし、

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha - \bar{\mathbf{r}} \quad (1)$$

と定義するとこれら N 個の点 $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ の平均は原点 O である。 \mathbf{x}_α を直線 l 上に射影した長さは、直線 l の方向と一致する単位ベクトル \mathbf{u}_1 を用いて表すと、図-1 より、

$$OH = \|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{x}_\alpha\| \cos \theta_\alpha = \|\mathbf{x}_\alpha\| \cos \theta_\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_\alpha) \quad (2)$$

と表される。ここで、 $(\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_\alpha)$ は \mathbf{u}_1 と \mathbf{x}_α の内積を表す。この長さの N 点にわたる 2 乗の平均は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_\alpha)^2 = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{u}_1^T \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\alpha^T \mathbf{u}_1 \quad (3) \\ &= \mathbf{u}_1^T \left(\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\alpha^T \right) \mathbf{u}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{V} \mathbf{u}_1) \end{aligned}$$

となる。ただし、行列 \mathbf{V} を次のように定義し、共分散行列と呼ぶ。

$$\mathbf{V} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\alpha^T \quad (4)$$

固有直交分解では、すべての単位ベクトルの中で \mathbf{V} が最大となるような \mathbf{u}_1 を見つける。 \mathbf{V} の固有値を λ とすると、 \mathbf{u}_1 は最大固有値 λ_1 に対応する単位固有ベクトルと一致する。この \mathbf{u}_1 が第 1 基底と呼ばれる、データの分布の特徴を表現する能力が最も強い基底である。この第 1 基底の方向は主方向と呼ばれる。

この主方向に直交する方向で最も分散の大きい方向を示す単位ベクトルを \mathbf{u}_2 とすると、これは \mathbf{V} の 2 番目に大きい固有値 λ_2 に対応する単位固有ベクトルに等しくなり、これを第 2 主方向と呼ぶ。同様に考えると、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ に直交し、分散が最大になる方向は共分散行列 \mathbf{V} の 3 番目に大きい固有値 λ_3 に対応する単位固有ベクトル \mathbf{u}_3 の方向である。一般に、 \mathbf{V} の固有値を大きい順に $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ とすると、その固有値に対応する固有直交ベクトルの正規直交系 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ が分散の大きい順にとった座標系となり、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ がそれぞれの方向の分散となっている。 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ の方

向を主軸、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を主値という。

主軸方向の単位ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ を基底とする、新しい $x'_1 x'_2 \dots x'_n$ 座標系を定義する。もとの座標系で座標 (x_1, x_2, \dots, x_n) を持つ点 \mathbf{x} が新しい座標系で座標 $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ を持つとすると、定義より次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{x} = x'_1 \mathbf{u}_1 + x'_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x'_n \mathbf{u}_n \quad (5)$$

これはベクトル \mathbf{x} の基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ による展開とも呼ばれる。 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ を列とする直交行列 \mathbf{U} とベクトル \mathbf{x}, \mathbf{x}' を

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

とすると、式 (5) は

$$\mathbf{x} = \mathbf{U} \mathbf{x}' \quad (7)$$

と書ける。このようにデータから基底を取り出し、観測値をその基底の線形結合で説明することを固有直交分解と呼ぶ。

b) 固有直交分解を用いた方程式系の縮約

これまで、固有直交分解の概要とその適用例を述べた。固有直交分解はデータの持っている情報量を縮約することができるが、変数の時空間変動を記述する方程式系を縮約することにも適用できる。例えば平²⁾は Navier-Stokes 方程式に固有直交分解を適用して方程式系を縮約する例を示している。本研究では、氾濫計算モデルの方程式系に固有直交分解を適用し、縮約されたモデルを導出する。

(2) 対象とする氾濫計算モデル

a) 基礎式

洪水氾濫計算は平面二次元不定流モデル(浅水方程式)を用いて行われることが多いが、このモデルから移流項を除いた方程式もしばしば用いられる。低平地の洪水氾濫計算では移流項は他の項と比べて重要ではないため、これを無視しても計算結果は大きく変わらず、さらに計算が安定するというメリットがある。近年では、この移流項を除いたモデルは局所慣性方程式と呼ばれる³⁾⁴⁾。本研究では、この局所慣性方程式を対象として検討する。

また、本来、洪水氾濫計算は平面二次元的に行われるものだが、本研究では一次元のモデルを対象として縮約の可否を検証する。二次元のモデルを対象とした縮約モデルも理論的には導出できたが、一次元のモデルに比べてプログラムのコーディングが飛躍的に複雑になり、デバッグする作業にかなりの時間を要すると思われたため、まずは比較的単純な一次元のモデルで確実に検証することにした。

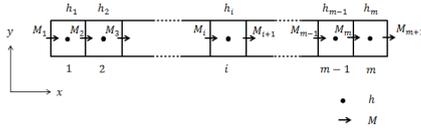


図-2 未知量の定義位置

一次元の局所慣性方程式は以下の通りである。

<連続式>

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} = r \quad (8)$$

<運動方程式>

$$\frac{\partial M}{\partial t} + gh \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{gn^2 |M| M}{h^{7/3}} = 0 \quad (9)$$

ここで、 h は水深、 M は x 方向の単位幅流量、 H は水位 ($H = h + z$, z は地盤高)、 r は降雨強度を表す。また、 g は重力加速度、 n は Manning の粗度係数、 t は時間、 x は水平方向の空間座標である。計算の対象とする領域は、セル数が m の一次元の流れ場とする。

b) 基礎式の差分化

式 (8), (9) を数値的に解くために、基礎式を離散化する。離散化の方法については、本研究では Bates *et al.*³⁾ の方法に従う。すなわち、連続式の時間項には後退差分、運動方程式の時間項には前進差分、その他の項には中央差分をそれぞれ適用する。以下、解析に用いた差分式を示す。

<連続式>

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} + \frac{M_{i+1}^{n+1} - M_i^{n+1}}{\Delta x} = r_i^n \quad (10)$$

<運動方程式>

$$\frac{M_i^{n+1} - M_i^n}{\Delta t} + gy_i^n \frac{H_i^n - H_{i-1}^n}{\Delta x} + gn^2 \frac{|M_i^n| M_i^n}{y_i^{7/3}} = 0 \quad (11)$$

ここで、上付き添字 n は時間ステップを表す。未知量は図-2 に示すような格子に配置し、下付き添え字の定義もこれに従う。水深 h のデータ量は m 、単位幅流量 M のデータ量は $m+1$ となる。また、 y_i は次式で与えられる。

$$y_i = \frac{h_{i-1} + h_i}{2} \quad (12)$$

これらの差分式を未知量である h_i^{n+1} , M_i^{n+1} について整理すると、

<連続式>

$$h_i^{n+1} = h_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (M_i^{n+1} - M_{i+1}^{n+1}) + \Delta t r_i^n \quad (13)$$

<運動方程式>

$$M_i^{n+1} = M_i^n + gy_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{i-1}^n - H_i^n) - gn^2 \Delta t \frac{|M_i^n| M_i^n}{y_i^{7/3}} \quad (14)$$

となる。式 (14) ですべての i に対する M_i^{n+1} を求め、次に M_i^{n+1} を式 (13) に代入して h_i^{n+1} を求める。

(3) 冗濫計算の縮約

a) 縮約手法の概要

本研究における計算式の縮約手法の概要を述べる。前節で得られた式 (13)、式 (14) はそれぞれ水深 h , x 方向の単位幅流量 M に関する代数方程式となっている。これらの方程式の次元は、それぞれセルの個数 m 、断面の個数 $m+1$ である。したがって、解かなければならない方程式の本数はトータルで $2m+1$ である。

いま、水深、流量のデータに固有直交分解を適用し、それぞれがそれぞれの基底の線形結合により表されているとする。これをもとの代数方程式に代入して、さらに基底の正規直交性を利用することで、基底に対する係数の代数方程式を得る。この代数方程式の次元は、水深と流量それぞれの基底の個数の和となる。これが先の $2m+1$ より小さければ、モデルを縮約したことになる。

b) 差分式の線形化

本研究で用いる縮約手法では、固有直交分解を適用する方程式系が変数について線形である必要がある。式 (14) の運動方程式は水深、単位幅流量について非線形であるため、そのままでは縮約手法を適用することができない。そこで、ある時刻の水位、単位幅流量、断面での水深まわりで Taylor 展開し線形化する。線形化された式は非常に長くなるため、ここでは割愛する。

c) 固有直交分解の適用

すべてのセルの水深とすべての断面の流量をまとめて式 (15), (16) のように表す。

$$\mathbf{h}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) & \dots & h_m(t) \end{pmatrix}^T \quad (15)$$

$$\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} M_1(t) & M_2(t) & \dots & M_{m+1}(t) \end{pmatrix}^T \quad (16)$$

これを用いると式 (13), (14) を線形化した式は、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}_{t=n+1} = K \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}_{t=n} + C + R \quad (17)$$

のように書くことができる。ここで K は $(2m+1)$ 行 $(2m+1)$ 列の係数行列、 C は $(2m+1)$ 行の定数列ベクトルで時間変化しない値である。 R は降雨強度などの時間変化する値を含む、 $(2m+1)$ 行の列ベクトルである。

次に、縮約する前の元のモデルで計算した水深と流量のデータに固有直交分解を適用して基底を抽出し、それぞれ Φ_h , Φ_M とする。

$$\Phi_h = \begin{pmatrix} \phi_{h1} & \phi_{h2} & \dots & \phi_{hk_h} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\Phi_M = \begin{pmatrix} \phi_{M1} & \phi_{M2} & \dots & \phi_{Mk_M} \end{pmatrix} \quad (19)$$

ここで、 k_h , k_M はそれぞれ、水深、流量のデータから取り出した支配的な基底の数である。あるデータから

基底を抽出する場合、そのもととなるデータの数と等しい数の基底の抽出が可能である。固有直交分解においては、その中でも支配的な比較的少ない数の基底を用いるため、ここでは Φ_h 、 Φ_M をそれぞれ式 (18)、式 (19) のように定義した。さらに Φ を式 (20) のように定義する。これを用いて水深と単位幅流量を基底の線形結合として表すと、式 (21) のようになる。

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_h & 0 \\ 0 & \Phi_M \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}_{t=n} = \begin{bmatrix} \Phi_h \boldsymbol{\alpha}^n \\ \Phi_M \boldsymbol{\beta}^n \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^n \\ \boldsymbol{\beta}^n \end{bmatrix} \quad (21)$$

ただし、 $\boldsymbol{\alpha}^n$ 、 $\boldsymbol{\beta}^n$ は時刻 n における、水深、単位幅流量の基底の係数をすべてまとめたものである。これを式 (17) に代入すると、式 (22) を得る。

$$\Phi \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{n+1} \\ \boldsymbol{\beta}^{n+1} \end{bmatrix} = K \Phi \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^n \\ \boldsymbol{\beta}^n \end{bmatrix} + C + R \quad (22)$$

この式に左から Φ の転置行列 Φ^T をかけると、基底は互いに正規直交しているため $\Phi^T \Phi = I$ (I は単位行列) となり、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{n+1} \\ \boldsymbol{\beta}^{n+1} \end{bmatrix} &= \Phi^T K \Phi \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^n \\ \boldsymbol{\beta}^n \end{bmatrix} + \Phi^T C + \Phi^T R \\ &= F \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^n \\ \boldsymbol{\beta}^n \end{bmatrix} + G + \Phi^T R \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる。ただし、

$$F = \Phi^T K \Phi \quad (24)$$

$$G = \Phi^T C \quad (25)$$

である。

以上の手順により、水深と流量の代数方程式が基底の係数の代数方程式に変換された。この式 (23) が縮約モデルの式である。この計算式を使うと、氾濫計算の次元を $2m + 1$ から $k_h + k_M$ にまで減らすことができる。また、 F, G は時間変化しない値によって構成される行列であるため、縮約された計算式を解く前に計算できる。差分式を線形化したことにより、代数方程式を (時刻 $n + 1$ における基底の係数) = (定数行列) \times (時刻 n における基底の係数) + (その他の項) の形で表したことがこの縮約手法の重要な点である。この縮約式に基づき、水深と流量の時間変化ではなく、基底の係数の時間変化を求め、必要に応じて式 (21) によって水深と流量の計算結果を復元する。

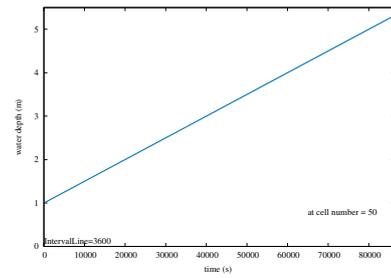


図-3 縮約前のモデルによる計算水深

3. 縮約手法の適用と考察

(1) 概説

本研究においては、長さ 1000 m の仮想的な一次元の領域で氾濫計算を行った。初期水深は 1.0 m で、洪水流は流入強度 $0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ で領域上流端から流入するとした。流出部は設けず領域内に氾濫水がたまっていく状況を仮定した。また、降雨はないものとした。洪水氾濫計算のためのセルの大きさは $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ とし、対象領域は 100 個のセルから構成されるものとした。計算時間は 24 時間、計算タイムステップは 1 秒とした。

このような領域において、縮約する前のモデル (局所慣性方程式) での洪水氾濫計算結果と縮約モデルでの氾濫計算結果の差を、経過時間、線形化の頻度、基底の個数の 3 つの観点から比較し考察する。また、計算にかかる時間も比較する。計算には Linux (CentOS release 6.7, 64 bit), Intel Xeon Processor X5690 x 2, 192GB RAM を用いた。ただし並列計算は行っていない。

(2) 縮約前のモデルによる氾濫計算

a) 計算結果

縮約前のモデルによる計算で得られたセル番号 50 (水路上端から 500m の地点) における水深の時間変化を図-3 に示す。領域内への流入強度が一定のため、水深も時間的におよそ一定の割合で増加する。また、図には示さないが、単位幅流量は計算開始直後に急激に増加し、その後はほぼ一定の値となる。

b) 基底の抽出

24 時間分の計算結果から 10 分間隔で水深と単位幅流量のデータを取り出し (それぞれ 145 個)、固有直交分解を適用して縮約モデルで用いる基底を抽出した。水深については、ほぼ第 1 基底のみでもとの分布を表すことができ、また、単位幅流量についても 7 つの基底でもとの分布を表せることが明らかとなった。本研究においては非常に簡単な一次元の流れ場を想定しているため水理量の時空間分布も単純になり、水深、単位幅流量ともに非常に少ない個数の基底で元の流れ場を表すことができるものと思われる。

(3) 縮約モデルによる氾濫計算

a) 計算方法

第 2 章で導出した縮約モデル式 (23) を用いて氾濫計算を行った。この式は式 (13), (14) の離散化された一次元局所慣性方程式を線形化することで導かれている。この線形化は式 (23) の係数行列 K 、定数列ベクトル C を更新することに相当する。線形化はある一定の時間間隔で行うことにした。

Taylor 展開に用いる水量は、 K 、 C を更新する時刻における縮約前のモデルによる計算結果の値を用いた。式 (23) に基づき、水深と単位幅流量の時空間分布から取り出した基底 Φ_h 、 Φ_M の係数 α^n 、 β^n を時々刻々変化する値として計算し、ある一定の時間間隔で式 (21) を用いて水深と単位幅流量を復元して出力する。

b) 計算結果と考察

図-4(a), 4(b) に縮約前のモデルによる計算結果と縮約モデルによって得られた結果の差の時間変化を示す。図-4(a) は水深に対するもの、図-4(b) は単位幅流量に対するものである。上流域の代表値としてセル番号 5、中流域の代表値としてセル番号 50、下流域の代表値としてセル番号 95 における水深と単位幅流量を示している。縮約モデルにおける線形化は 10 分間隔で行った。

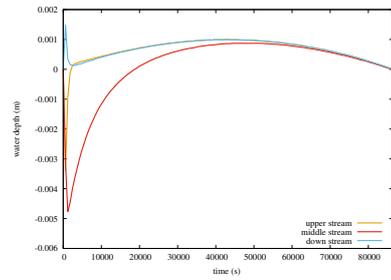
図-4(b) を見ると、単位幅流量の計算結果は計算開始直後再現性が低いことがわかる。式 (13) より、時刻 $n+1$ における水深は、時刻 $n+1$ における単位幅流量により求められる。従って、水深は単位幅流量の再現性の影響を受けるため、水深も計算開始直後はあまり再現性がよくなく、しだいに差が小さくなっている。

図-5(a), 5(b) は、縮約前のモデルによる計算結果と縮約モデルによる計算結果の差の空間分布を示したものである。縮約モデルによる線形化の時間間隔 (回数) を、1 秒 (86400 回)、10 分 (144 回)、30 分 (48 回)、1 時間 (24 回)、2 時間 (12 回)、3 時間 (8 回) と変えることで、計算結果の差がどのように変化するか調べた。

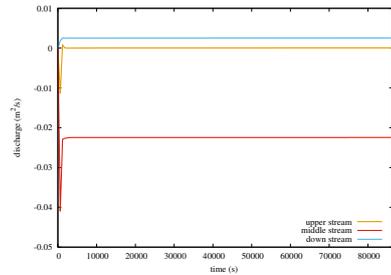
線形化の時間間隔を、1 秒、10 分、30 分、1 時間とした場合においては、水深、単位幅流量ともに縮約前のモデルによる計算結果との差はほぼないと言える。本研究においては、非常に簡単な流れ場、条件で氾濫計算を行っており、水深、単位幅流量の時間方向の変化が小さく単調であるため、1 時間程度では水深や流量が計算結果に影響を及ぼさない程度しか変化しないと言える。また、線形化の精度もよいと考えられる。

線形化の時間間隔が 2 時間を上回ると、縮約前のモデルとの計算結果の差は大きくなり、特に上流の水量の空間分布がうまく再現できていないことがわかる。

線形化の時間間隔と計算に要した時間の関係を表-1 に示す。1 秒間隔 (= 毎計算ステップ) で線形化を行う場合を除いて、縮約モデルによる計算時間は縮約前のモデルの計算時間に比べ短くなっている。線形化するごとに計算上り作業は、縮約式における係数行列 K

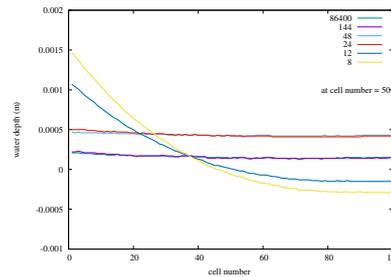


(a) 縮約前のモデルと縮約モデルで計算した水深の差

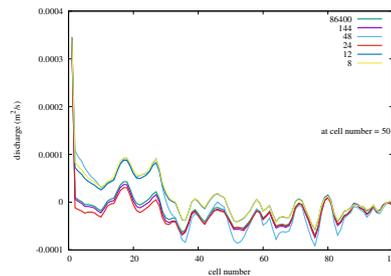


(b) 縮約前のモデルと縮約モデルで計算した単位幅流量の差

図-4 縮約前のモデルの計算結果と縮約モデルの計算結果の差 (10 分間隔で線形化を行った場合)



(a) 水深の計算結果の差の時間分布



(b) 単位幅流量の計算結果の差の時間分布

図-5 線形化を行う回数による縮約モデル計算結果の違い

と定数列ベクトル C の値を更新する作業である。 K は 201 行 201 列の行列であり、 C は 201 行の列ベクトルである。これらの行列とベクトルの要素の値を計算し、式 (24), (25) にしたがって F , G を計算する。これは非常に計算量の多い作業であるため、高頻度で行うほど、全体の計算時間も長くなっている。

表-1 線形化の時間間隔と計算時間の関係

線形化の時間間隔	1 秒	10 分	30 分	1 時間	2 時間	3 時間	縮約前のモデル
計算時間 (秒)	2274.24	14.11	11.59	10.97	10.68	10.53	17.94

表-2 基底の個数の違いによる計算時間の違い

	case 1 (基底総数: 20)	case 2 (基底総数: 8)	縮約前のモデル
計算時間 (秒)	14.11	6.98	17.94

図-6(a), 6(b) に縮約前のモデルによる水深の計算結果と、固有直交分解に用いる基底の数を少なくした場合の水深の計算結果の差の空間分布と時間分布を示す。図中、case 1, case 2 とあるが、それぞれ case 1: 水深と単位幅流量いずれも 10 個ずつの基底を用いたケース、case 2: 水深には 1 つの基底、単位幅流量には 7 つの基底を用いたケースである。

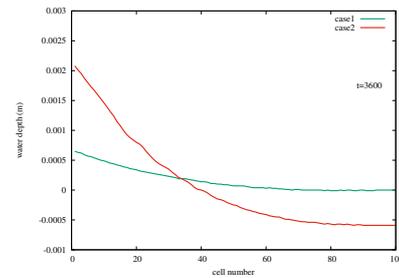
図-6(a), 図-6(b) より、少ない基底を用いた case 2 の方が、縮約前のモデルの計算結果との差が大きくなった。その差は上流側で特に大きく、下流に向かうにしたがって小さくなっている。これは、計算領域の上流から洪水流が流入するため、上流域の方が水理量の時間的空間的变化が大きく、少ない個数の基底でその変化を表すことが難しいためと考えられる。時間分布をみると、水深では case 1 と case 2 でさほど違いはない。

次に、case 1 と case 2 における計算にかかった時間を表-2 に示す。いずれのケースも縮約前のモデルよりも短い時間で計算を終えている。また、case 2 では計算時間が case 1 の半分以下になっている。計算に用いる基底の個数が少なければ、縮約モデルの計算式の次元も小さくなるため、より計算量が少なくなっているものと思われる。

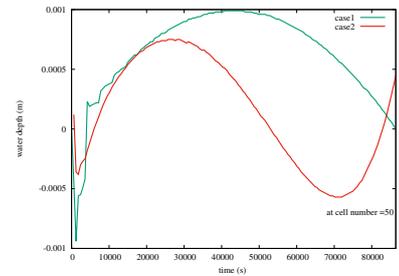
4. おわりに

本研究では、従来の洪水氾濫計算における計算コストの削減を目的に、固有直交分解に基づく氾濫計算の縮約モデルを開発した。また、1次元の流れ場を対象として縮約モデルによる計算結果と従来のモデルの計算結果を比較し、計算値の精度・計算時間について検証した。その結果、以下のことが明らかとなった。

- 縮約モデルは、従来のモデルに比べて、計算の次元（未知量の個数）を大幅に減らすことができる。たとえば今回の適用例においては、従来のモデルの計算次元は 201（水深：100, 単位幅流量（上下端の断面を含む）：101）であるのに対し、縮約モデルの計算次元はせいぜい 10~20 程度となった。
- 縮約モデルで用いる基底の個数が多ければ計算精度は高くなるが計算時間は増大する。逆に、基底の個数が少なければ計算精度は低くなるが計算時



(a) 水深の計算結果の差の空間分布



(b) 水深の計算結果の差の時間分布

図-6 固有直交分解に用いる基底の数による計算結果の変化

間は減少する。

- 縮約モデルでは非線形式の線形化が必要であり、この作業の計算コストが大きい。あまり頻繁に線形化を行うと、縮約モデルの利点が失われる。逆に線形化の頻度が低すぎると計算精度が悪化する。今回の適用例では、1~3時間ごとに線形化すれば計算精度を損なわずに計算量を縮減できることがわかった。

参考文献

- 野口博司, 磯貝恭史: 企業分析と次元数の縮約化, 流通科学大学論文集, 経済・情報・政策編, 20, pp. 65-78, 2012.
- 平邦彦: 固有直交分解による流体解析: 1. 基礎, ながれ, 30, pp. 115-123, 2011.
- Bates P. D., Horritt M. S., Fewtrell T. J.: A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two-dimensional flood inundation modeling, Journal of Hydrology, 387, pp. 33-45, 2010.
- 山崎 大, 田中智大, Paul D. Bates: 局所慣性方程式の導入による洪水氾濫計算の安定化と高速化, 水文・水資源学会誌, 28, pp. 124-130, 2015.